

# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυσκοπίας

**ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΙ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΔΙΑΛΥΜΑΤΟΣ ΜΕΘ’  
ΕΤΕΡΑΣ ΦΑΣΕΩΣ ΕΚ ΚΑΘΑΡΟΥ ΔΙΑΛΥΤΟΥ**  
Προσδιορισμός μοριακού βάρους κρυσκοπικώς

## Γραμμομοριακή Μάζα, $M$

$$M = \frac{\text{μάζα δοσμένης ποσότητας ουσίας}}{\text{αυτήν την ποσότητα της ουσίας}}$$

- Μονάδες στο S.I.       $\text{kg mol}^{-1}$
- Συνήθως σε       $\text{g mol}^{-1}$

# Αθροιστικές Ιδιότητες Διαλυμάτων

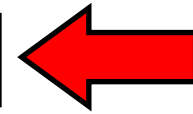
- Μείωση της τάσης ατμών του διαλύτη
- Ανύψωση του Σημείου Ζέσεως του διαλύτη
- Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη
- Εμφάνιση Ωσμωτικής Πίεσης

Σε αραιά διαλύματα ( $\rightarrow$  ιδανικά) οι ιδιότητες αυτές

- εξαρτώνται από τη φύση του διαλύτη
- δεν εξαρτώνται από τη φύση των διαλυμένων σωματιδίων
- εξαρτώνται από τον λόγο  $\frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{\text{αριθμός μορίων του διαλύτη}}$

# Αθροιστικές Ιδιότητες Διαλυμάτων

- Μείωση της τάσης ατμών του διαλύτη
- Ανύψωση του Σημείου Ζέσεως του διαλύτη
- Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη
- Εμφάνιση Ωσμωτικής Πίεσης

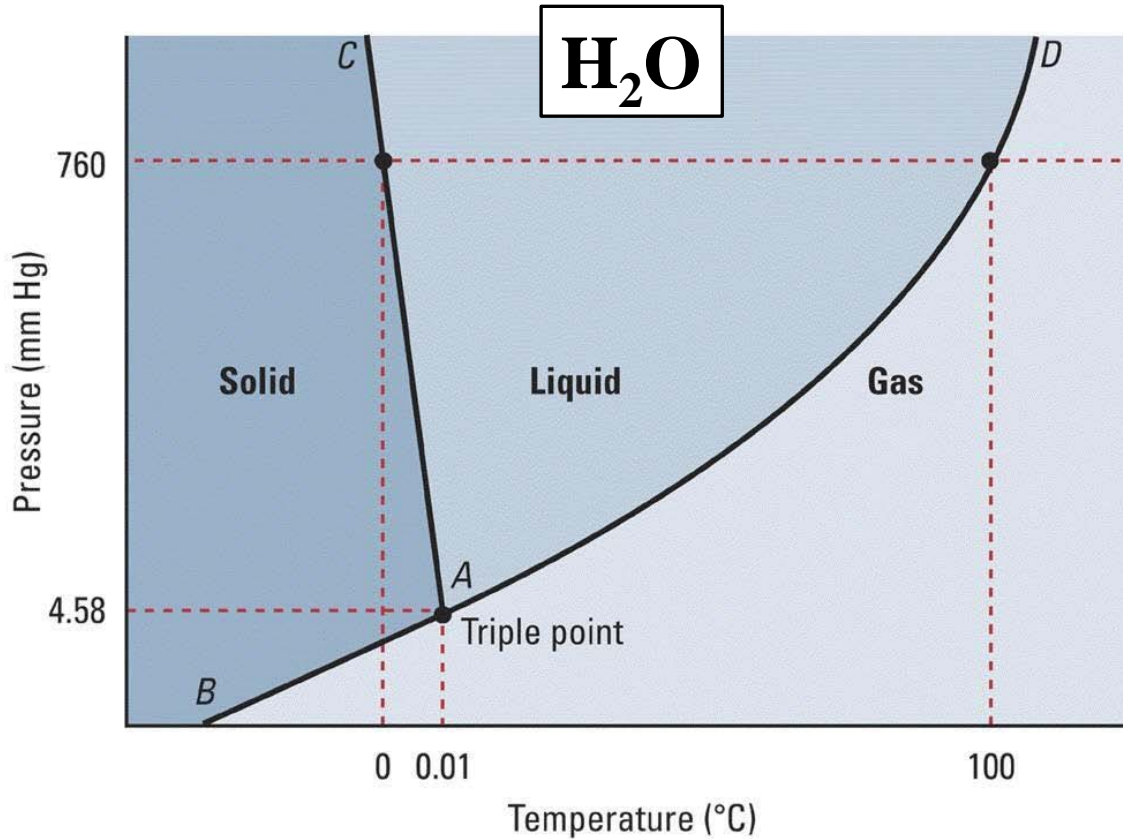


Σε αραιά διαλύματα ( $\rightarrow$  ιδανικά) οι ιδιότητες αυτές

- εξαρτώνται από τη φύση του διαλύτη
- δεν εξαρτώνται από τη φύση των διαλυμένων σωματιδίων
- εξαρτώνται από τον λόγο  $\frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{\text{αριθμός μορίων του διαλύτη}}$

## Σημείο Πήξεως ουσίας

Για δοσμένη πίεση, η θερμοκρασία στην οποία η υγρή ουσία στερεοποιείται. Στο Σ. Π. η στερεά και η υγρή κατάσταση της ουσίας βρίσκονται σε ισορροπία.



Σε κάθε σημείο της καμπύλης AC

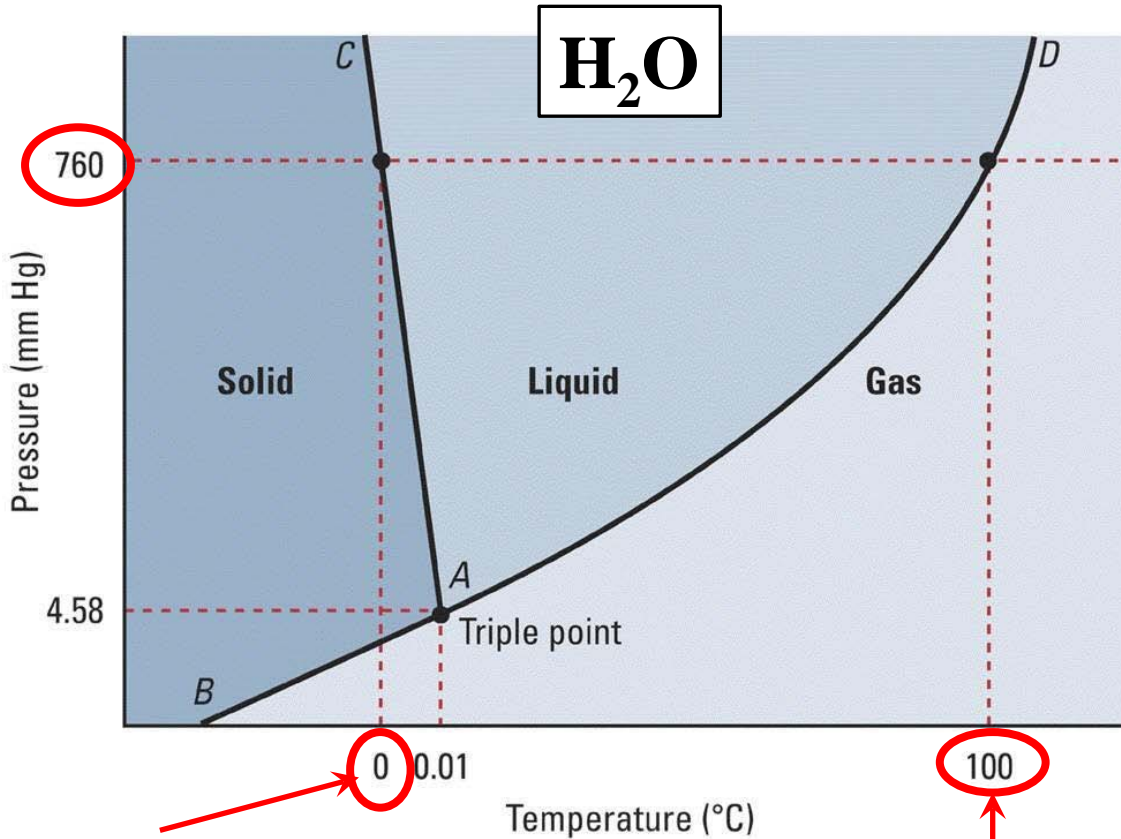
- η στερεά φάση είναι σε ισορροπία με την υγρή
- η ταχύτητα με την οποία λειώνει (τήκεται) η ουσία είναι ίση με την ταχύτητα με την οποία στερεοποιείται (πήζει)
- τα χημικά δυναμικά της ουσίας (για T και P του σημείου) στην στερεή και στην υγρή κατάσταση είναι ίσα

$$\mu_{A(s)}^* = \mu_{A(l)}^*$$

Η καμπύλη AC παριστά την μεταβολή του Σ.Π. με την πίεση.

## Σημείο Πήξεως ουσίας

Για δοσμένη πίεση, η θερμοκρασία στην οποία η υγρή ουσία στερεοποιείται. Στο Σ. Π. η στερεά και η υγρή κατάσταση της ουσίας βρίσκονται σε ισορροπία.



Κανονικό Σ.Π.

Κανονικό Σ.Ζ.

Σε κάθε σημείο της καμπύλης AC

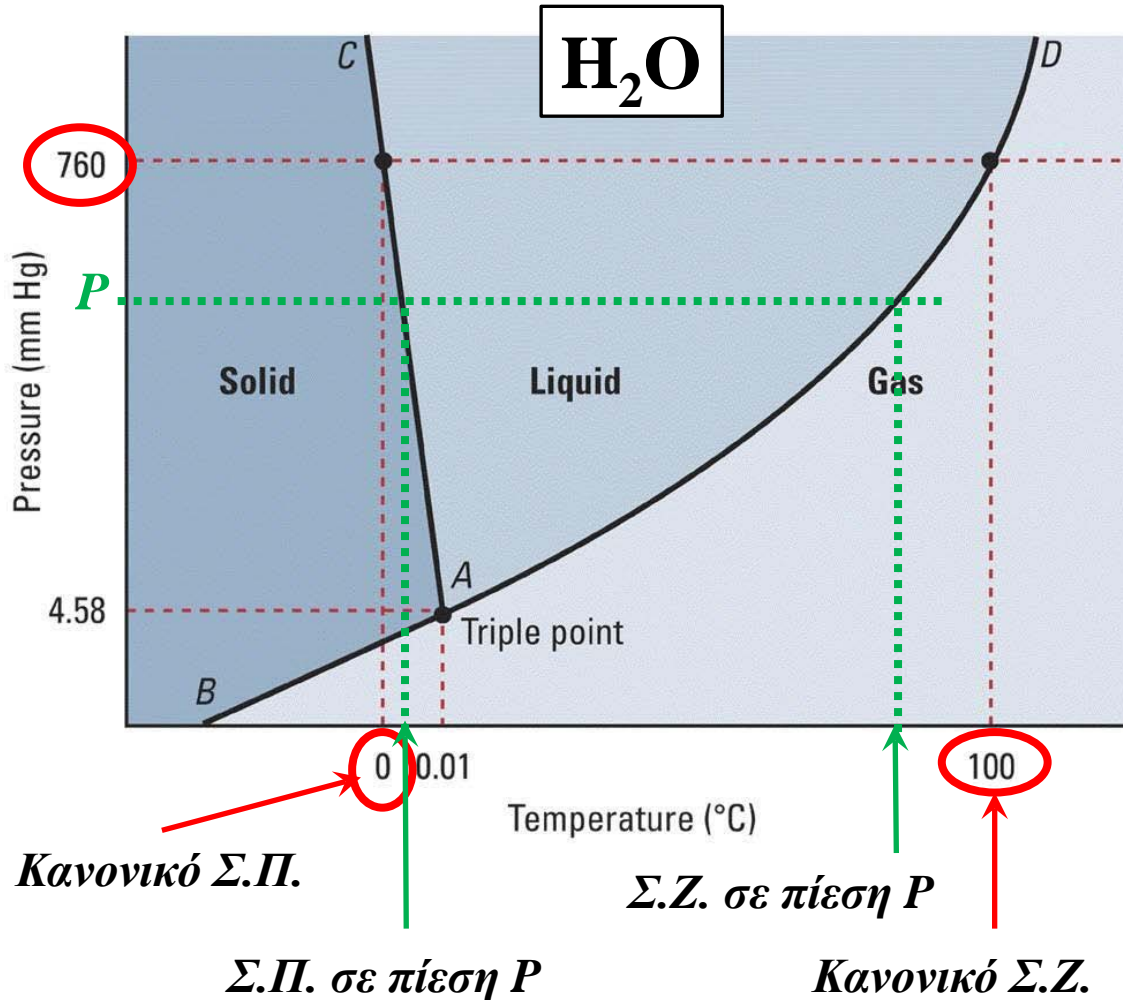
- η στερεά φάση είναι σε ισορροπία με την υγρή
- η ταχύτητα με την οποία λειώνει (τήκεται) η ουσία είναι ίση με την ταχύτητα με την οποία στερεοποιείται (πήζει)
- τα χημικά δυναμικά της ουσίας (για T και P του σημείου) στην στερεή και στην υγρή κατάσταση είναι ίσα

$$\mu_{A(s)}^* = \mu_{A(l)}^*$$

Η καμπύλη AC παριστά την μεταβολή του Σ.Π. με την πίεση.

## Σημείο Πήξεως ουσίας

Για δοσμένη πίεση, η θερμοκρασία στην οποία η υγρή ουσία στερεοποιείται. Στο Σ. Π. η στερεά και η υγρή κατάσταση της ουσίας βρίσκονται σε ισορροπία.



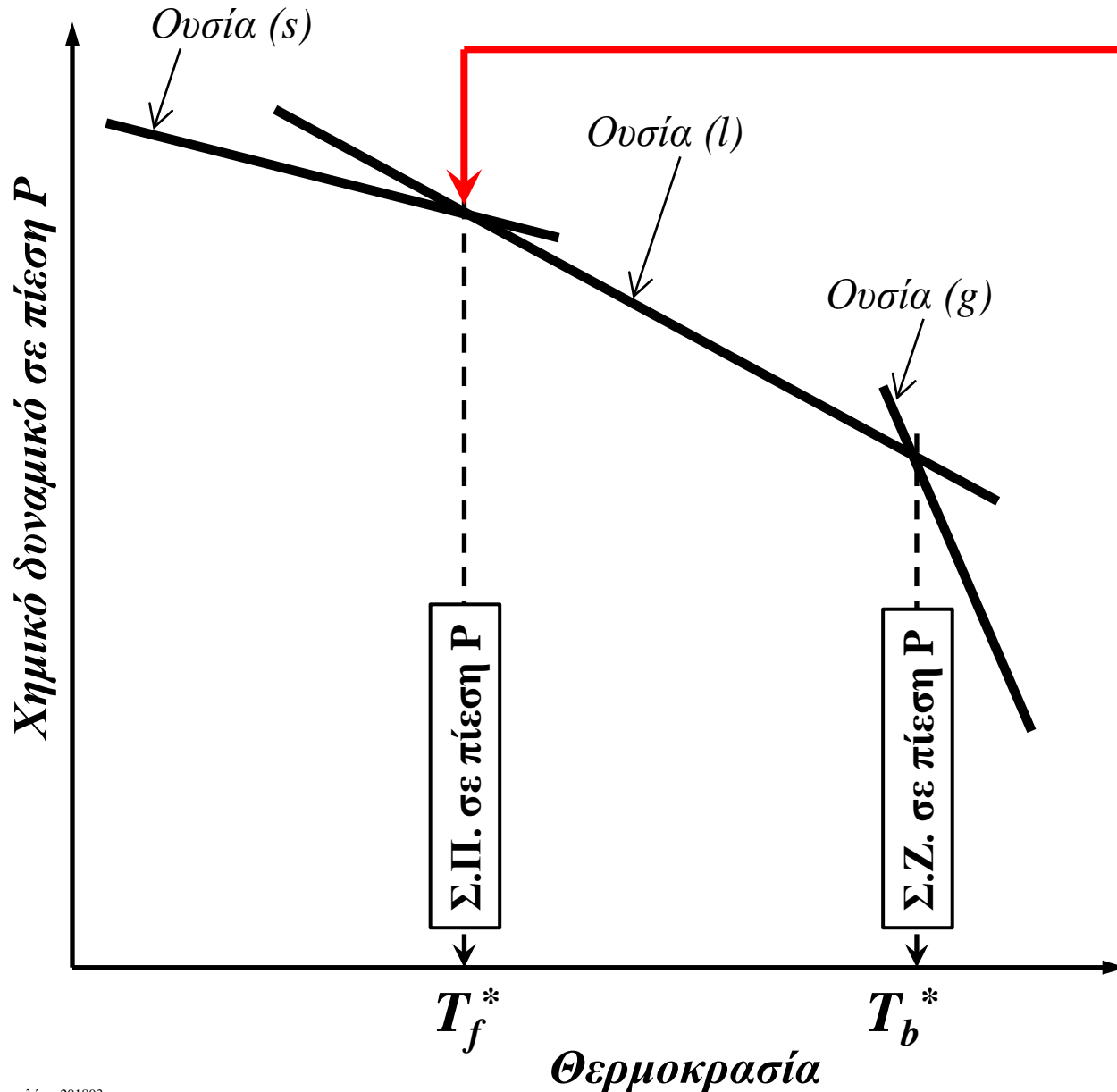
Σε κάθε σημείο της καμπύλης AC

- η στερεά φάση είναι σε ισορροπία με την υγρή
- η ταχύτητα με την οποία λειώνει (τήκεται) η ουσία είναι ίση με την ταχύτητα με την οποία στερεοποιείται (πήζει)
- τα χημικά δυναμικά της ουσίας (για T και P του σημείου) στην στερεή και στην υγρή κατάσταση είναι ίσα

$$\mu_{A(s)}^* = \mu_{A(l)}^*$$

Η καμπύλη AC παριστά την μεταβολή του Σ.Π. με την πίεση.

Για δοσμένη πίεση, η θερμοκρασία στην οποία η υγρή ουσία στερεοποιείται. Στο Σ. Π. η στερεά και η υγρή κατάσταση της ουσίας βρίσκονται σε ισορροπία.



$$\mu_{A(s)}^* = \mu_{A(l)}^*$$



# Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη

Όλες οι αθροιστικές ιδιότητες πηγάζουν από την μείωση του χημικού δυναμικού του υγρού διαλύτη που προκαλεί η παρουσία της διαλυμένης ουσίας.

Σε αραιά (ιδανικά) διαλύματα ισχύει ότι:

$$\mu_A = \mu_A^* + RT \ln x_A$$

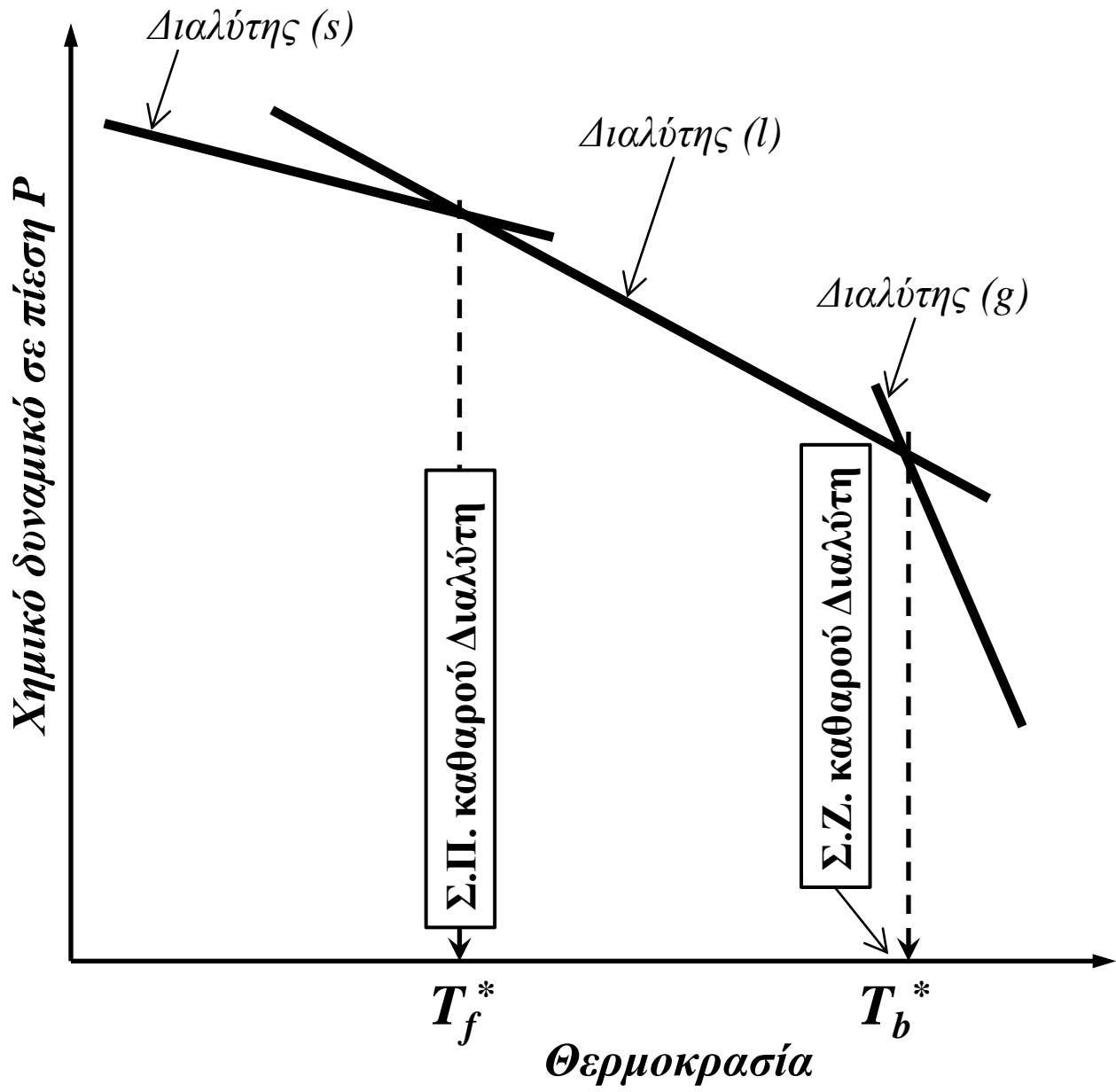
Χημικό δυναμικό του καθαρού διαλύτη

Χημικό δυναμικό του διαλύτη στο διάλυμα

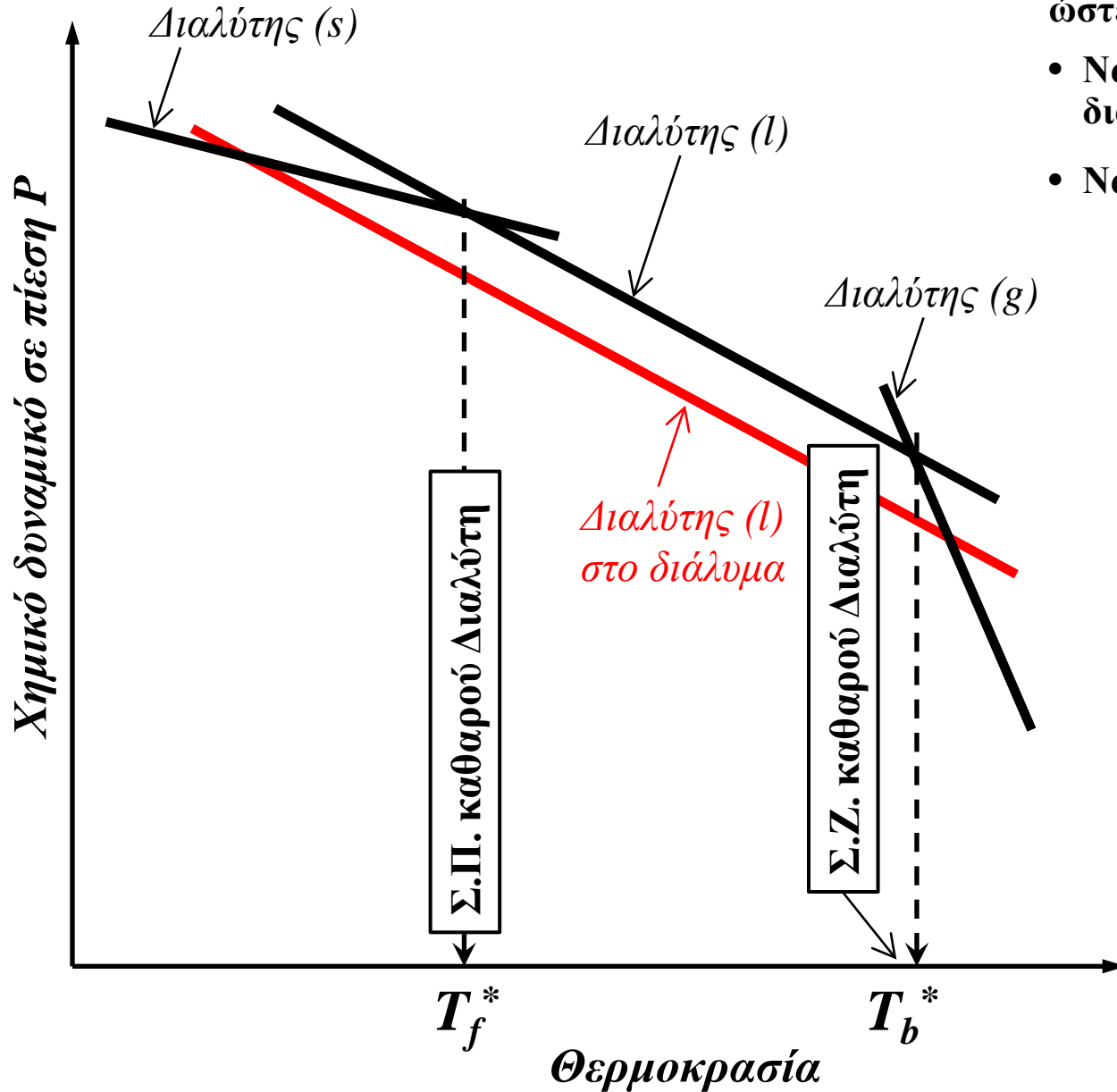
Γραμμομοριακό κλάσμα του διαλύτη στο διάλυμα

$$x_A < 1 \Rightarrow \ln x_A < 0 \Rightarrow \mu_A < \mu_A^*$$

# Σημείο Πήξεως του καθαρού διαλύτη



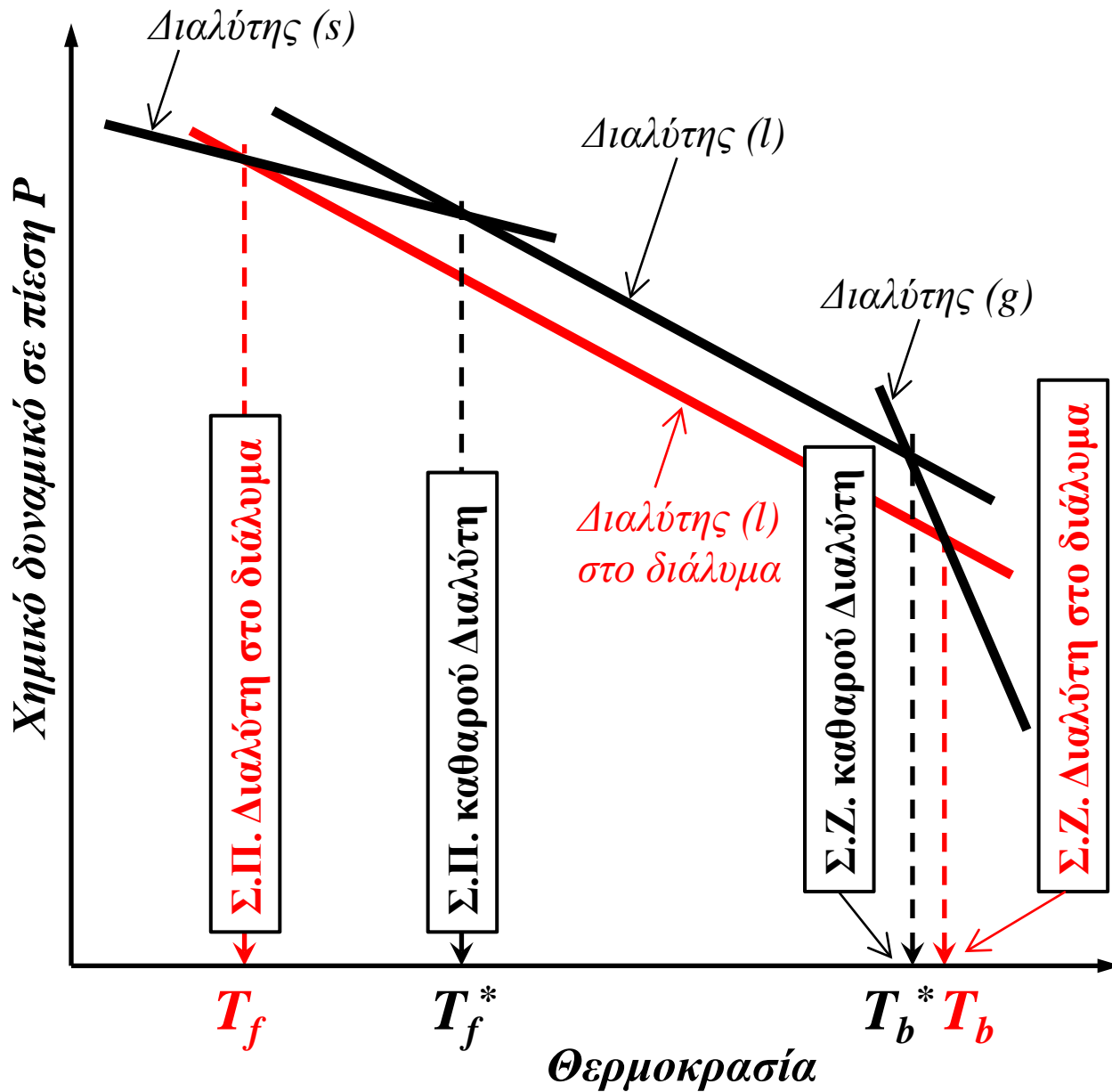
## Σημείο Πήξεως του διαλύτη στο διάλυμα



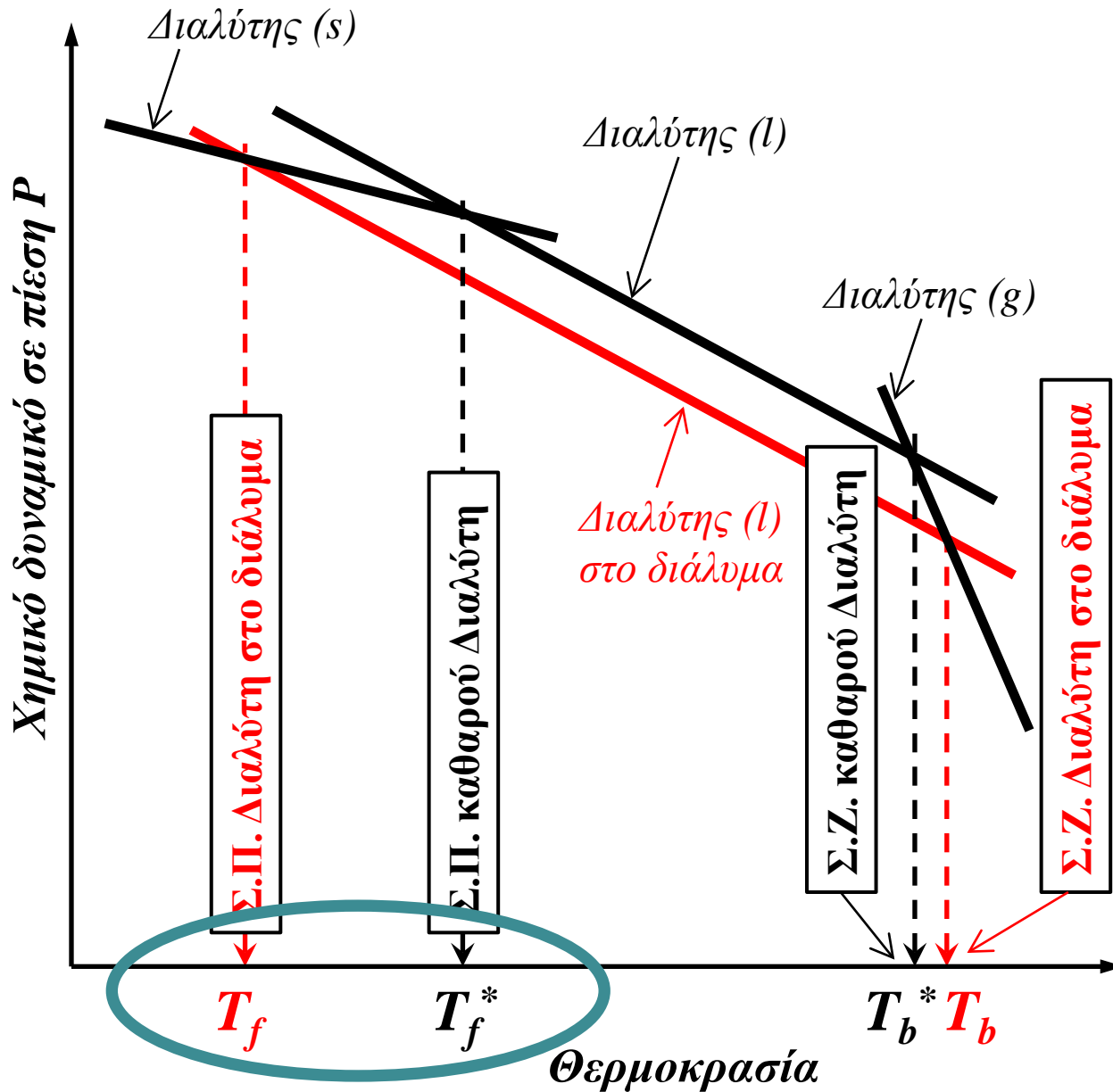
Η διαλυμένη ουσία επιλέγεται έτσι ώστε:

- Να μην διαλύεται στον στερεό διαλύτη
- Να έχει αμελητέα τάση ατμών

# Σημείο Πήξεως του διαλύτη στο διάλυμα



# Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη



$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

# Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f b i$$

# Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f b i$$

$K_f$

## Κρυοσκοπική Σταθερά του Διαλύτη

- Εξαρτάται μόνο από τη φύση του διαλύτη

$$K_f = \frac{R(T_f^*)^2 M_A}{\Delta H_{\tau\eta\xi}}$$

- $R$  η σταθερά των αερίων ( $8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ )
- $T_f^*$  το Σ.Π. του καθαρού διαλύτη (K)
- $M_A$  η γραμμομοριακή μάζα του διαλύτη ( $\text{kg mol}^{-1}$ )
- $\Delta H_{\tau\eta\xi}$  η γραμμομοριακή λανθάνουσα θερμότητα τήξης του καθαρού διαλύτη ( $\text{J mol}^{-1}$ )
- Οι μονάδες της  $K_f$  στο S.I. είναι ( $\text{K kg mol}^{-1}$ )
- Η  $K_f$  του νερού είναι  $1,858 \text{ K kg mol}^{-1}$

# Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f b i$$

***b***

**Molality** (*Γραμμομοριακότητα κατά βάρος*)

$$b = \frac{\text{ποσότητα διαλυμένης ουσίας}}{\text{μάζα του διαλύτη}}$$

- Ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία έκφραση συγκέντρωσης
- Οι μονάδες της  $b$  στο S.I. είναι ( $\text{mol kg}^{-1}$ )



## Παράδειγμα υπολογισμού της molality (b) διαλύματος

Έστω διάλυμα ουσίας B σε διαλύτη A. Ποια η molality, b, του διαλύματος αν δίνονται:

$M_B$  η γραμμομοριακή μάζα της διαλυμένης ουσίας B  
 $m_B$  η μάζα της διαλυμένης ουσίας B, και  
 $m_A$  η μάζα του διαλύτη A.

$$b = \frac{\text{ποσότητα διαλυμένης ουσίας}}{\text{μάζα του διαλύτη}}$$

## Παράδειγμα υπολογισμού της molality (b) διαλύματος

Έστω διάλυμα ουσίας B σε διαλύτη A. Ποια η molality, b, του διαλύματος αν δίνονται:

- $M_B$  η γραμμομοριακή μάζα της διαλυμένης ουσίας B  
 $m_B$  η μάζα της διαλυμένης ουσίας B, και  
 $m_A$  η μάζα του διαλύτη A.

$$b = \frac{\text{ποσότητα διαλυμένης ουσίας}}{\text{μάζα του διαλύτη}}$$

$$b = \frac{n_B}{m_A} = \frac{\frac{m_B}{M_B}}{m_A} \Rightarrow b = \frac{m_B}{m_A M_B}$$

## Παράδειγμα υπολογισμού της molality (b) διαλύματος

Έστω διάλυμα ουσίας B σε διαλύτη A. Ποια η molality, b, του διαλύματος αν δίνονται:

$M_B$  η γραμμομοριακή μάζα της διαλυμένης ουσίας B  
 $m_B$  η μάζα της διαλυμένης ουσίας B, και  
 $m_A$  η μάζα του διαλύτη A.

$$b = \frac{\text{ποσότητα διαλυμένης ουσίας}}{\text{μάζα του διαλύτη}}$$

$$b = \frac{n_B}{m_A} = \frac{\frac{m_B}{M_B}}{m_A} \Rightarrow b = \frac{m_B}{m_A M_B}$$

### Εφαρμογή

Σε 13,25 g διαλύματος ουσίας B σε διαλύτη A περιέχονται 12,5 g διαλύτη. Αν η γραμμομοριακή μάζα της διαλυμένης ουσίας B είναι 60 g/mol, τότε ποια η molality, b, του διαλύματος;

## Παράδειγμα υπολογισμού της molality ( $b$ ) διαλύματος

### Εφαρμογή

Σε 13,25 g διαλύματος ουσίας B σε διαλύτη A περιέχονται 12,5 g διαλύτη. Αν η γραμμομοριακή μάζα της διαλυμένης ουσίας B είναι 60 g/mol, τότε ποια η molality,  $b$ , του διαλύματος;

$$b = \frac{n_B}{m_A} = \frac{\frac{m_B}{M_B}}{m_A} \Rightarrow b = \frac{(13,25 - 12,5) \text{ g}}{60 \text{ g mol}^{-1} \times 12,5 \text{ g} \times (10^{-3} \text{ kg g}^{-1})} \Rightarrow$$

$$b = 1 \text{ mol kg}^{-1}$$

- Προσοχή στις μονάδες !
- Η molality,  $b$ , εκφράζεται πάντα σε (mol kg<sup>-1</sup>)

# Ταπείνωση του Σημείου Πήξεως του διαλύτη

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f b i$$

*i*

## Συντελεστής van 't Hoff

$$i = \frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{N_A \times (\text{ποσότητα ουσίας που διαλύθηκε})}$$

- $N_A$  ο αριθμός Avogadro ( $6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ )
- Ο συντελεστής van 't Hoff είναι αδιάστατο μέγεθος
- 1 mol ουσίας που διαλύεται δεν δίνει πάντα 1 mol σωματιδίων στο διάλυμα!
- Ο συντελεστής van 't Hoff αποτελεί μέτρο της επίδρασης που έχει μια διαλυμένη ουσία στις αθροιστικές ιδιότητες των διαλυμάτων της.
- Για την πλειονότητα των υδατικών μη-ηλεκτρολυτικών διαλυμάτων, ο συντελεστής van 't Hoff είναι πρακτικώς ίσος με την μονάδα.

## Παράδειγμα υπολογισμού του συντελεστή van 't Hoff ( $i$ )

Έστω διάλυμα ασθενούς οξέος HA. Ποιος ο συντελεστή van 't Hoff ( $i$ ) αν δίνεται ο βαθμός διάστασης,  $\alpha$ , του HA στις συνθήκες του διαλύματος.

$$i = \frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{N_A \times (\text{ποσότητα ουσίας που διαλύθηκε})}$$

# Παράδειγμα υπολογισμού του συντελεστή van 't Hoff ( $i$ )

Έστω διάλυμα ασθενούς οξέος HA. Ποιος ο συντελεστή van 't Hoff ( $i$ ) αν δίνεται ο βαθμός διάστασης,  $\alpha$ , του HA στις συνθήκες του διαλύματος.

$$i = \frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{N_A \times (\text{ποσότητα ουσίας που διαλύθηκε})}$$

Διαλύθηκαν  
Διαστάθηκαν /  
Παρήχθησαν

HA	→	H <sup>+</sup>	+	A <sup>-</sup>	} moles
$x$					
$\alpha x$		$\alpha x$		$\alpha x$	

# Παράδειγμα υπολογισμού του συντελεστή van 't Hoff ( $i$ )

Έστω διάλυμα ασθενούς οξέος HA. Ποιος ο συντελεστή van 't Hoff ( $i$ ) αν δίνεται ο βαθμός διάστασης,  $\alpha$ , του HA στις συνθήκες του διαλύματος.

$$i = \frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{N_A \times (\text{ποσότητα ουσίας που διαλύθηκε})}$$

Διαλύθηκαν  
Διαστάθηκαν /  
Παρήχθησαν

HA	→	H <sup>+</sup>	+	A <sup>-</sup>	
$x$					} moles
$\alpha x$		$\alpha x$		$\alpha x$	
$x - \alpha x$		$\alpha x$		$\alpha x$	

Ποσότητες σωματιδίων στο διάλυμα

$$i = \frac{N_A \times (x - \alpha x + \alpha x + \alpha x)}{N_A \times (x)} \Rightarrow i = 1 + \alpha$$

• Όταν η διαλυμένη ουσία δίσταται τότε  $i > 1$  !



# Παράδειγμα υπολογισμού του συντελεστή van 't Hoff ( $i$ )

## Εφαρμογή

Ποιος είναι ο συντελεστή van 't Hoff ( $i$ ) στα παρακάτω διαλύματα;

1. Αραιό υδατικό διάλυμα NaCl.
2. Αραιό υδατικό διάλυμα  $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ .
3. Αραιό διάλυμα οξικού οξέος σε βενζόλιο. Στις συνθήκες του διαλύματος κλάσμα  $\alpha$  των μορίων του οξικού οξέος συνδέονται με δεσμούς υδρογόνου και σχηματίζουν διμερή  $(\text{CH}_3\text{COOH})_2$ .

$$i = \frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{N_A \times (\text{ποσότητα ουσίας που διαλύθηκε})}$$

# Παράδειγμα υπολογισμού του συντελεστή van 't Hoff ( $i$ )

## Εφαρμογή

Ποιος είναι ο συντελεστή van 't Hoff ( $i$ ) στα παρακάτω διαλύματα;

1. Αραιό υδατικό διάλυμα NaCl.

$$i = 2$$

2. Αραιό υδατικό διάλυμα  $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ .

$$i = 4$$

3. Αραιό διάλυμα οξικού οξέος σε βενζόλιο. Στις συνθήκες του διαλύματος κλάσμα  $\alpha$  των μορίων του οξικού οξέος συνδέονται με δεσμούς υδρογόνου και σχηματίζουν διμερή  $(\text{CH}_3\text{COOH})_2$ .

$$i = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

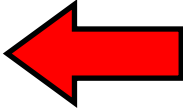
$$i = \frac{\text{αριθμός διαλυμένων σωματιδίων}}{N_A \times (\text{ποσότητα ουσίας που διαλύθηκε})}$$

- Ο συντελεστής van 't Hoff ( $i$ ) μπορεί να είναι μεγαλύτερος, ίσος ή και μικρότερος του 1 !

## **Κρυοσκοπία.**

**Ο πειραματικός προσδιορισμός της ταπείνωσης του Σημείου Πήξεως μιας υγρής ουσίας που προκαλείται από την διάλυση σε αυτή διαφόρων ουσιών.**

**Οδηγεί στην απόκτηση πληροφοριών για την διαλυμένη ουσία ή/και για τα διαλύματα.**

- **Γραμμομοριακή μάζας διαλυμένης ουσίας.** 
- **Καθαρότητα υγρής ουσίας**
- **Έλεγχος νοθείας (πχ νοθεία γάλακτος με νερό)**
- **Καταλληλότητα αντιψυκτικού μείγματος για δοσμένη εφαρμογή**
- **Βαθμός διάστασης διαλυμένης ουσίας**
- ...

# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυοσκοπίας

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f b i$$

$$b = \frac{m_B}{m_A M_B}$$

$$\Delta T_f = K_f \frac{m_B}{m_A M_B} i \Rightarrow \Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυοσκοπίας

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

1

$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

2

Η (σχ. 2) είναι της μορφής:

$$\Delta T_f = \kappa m_B$$

3

1. Προσδιορίζουμε τα  $\Delta T_f$  (σχ. 1) για διαλύματα που περιέχουν την ίδια μάζα διαλύτη ( $m_A$ ) αλλά διαφορετικές μάζες διαλυμένης ουσίας ( $m_B$ ).
2. Από την γραφική παράσταση των  $\Delta T_f$  έναντι των μαζών  $m_B$  προσδιορίζουμε την κλίση ( $\kappa$ ) της βέλτιστης ευθείας (σχ. 3).
3. Από τις (σχ. 2 και σχ. 3) έχουμε:

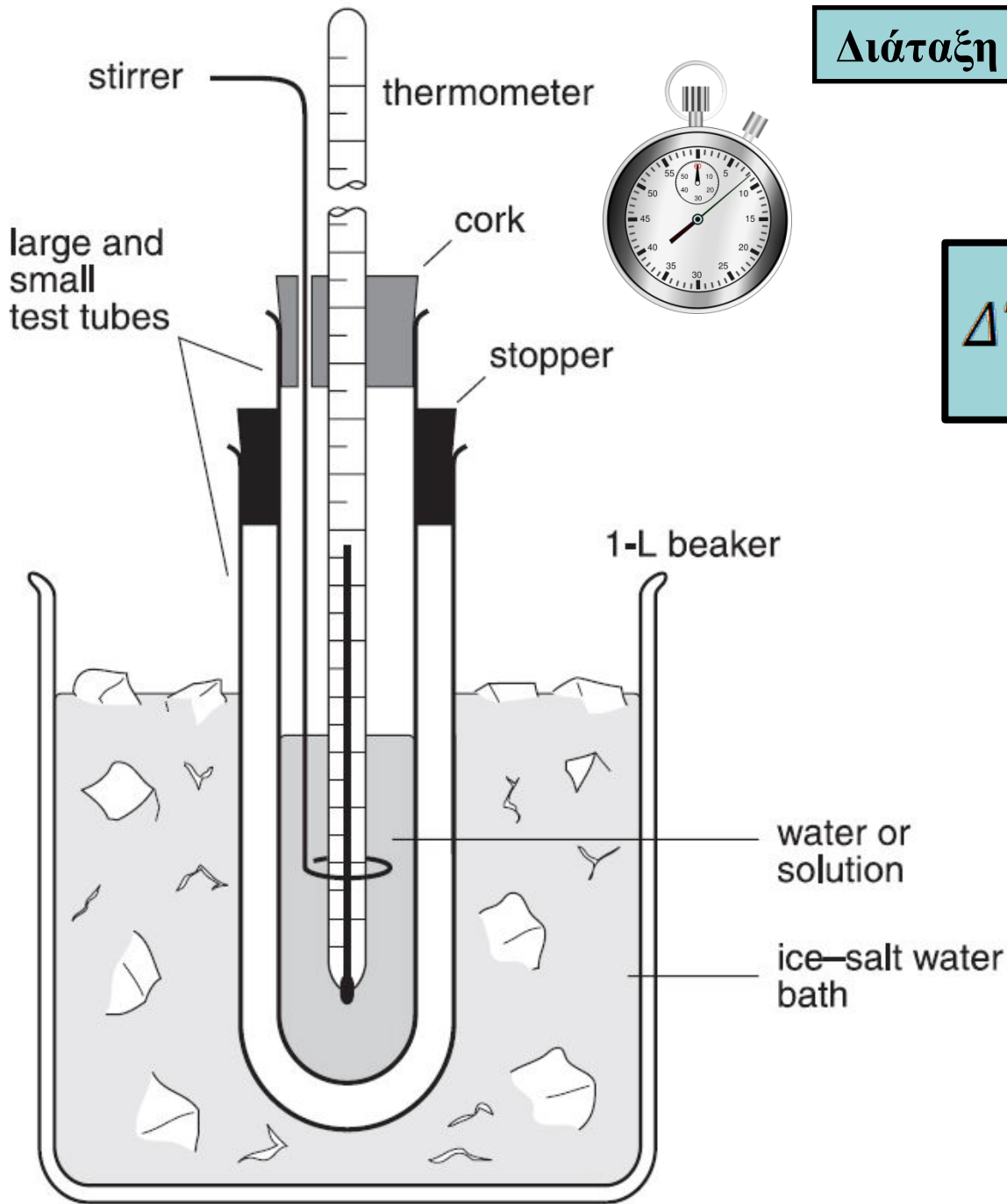
$$\kappa = K_f \frac{i}{m_A M_B} \Rightarrow$$

$$M_B = K_f \frac{i}{m_A \kappa}$$

## Διάταξη για τον προσδιορισμό του Σ.Π.

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

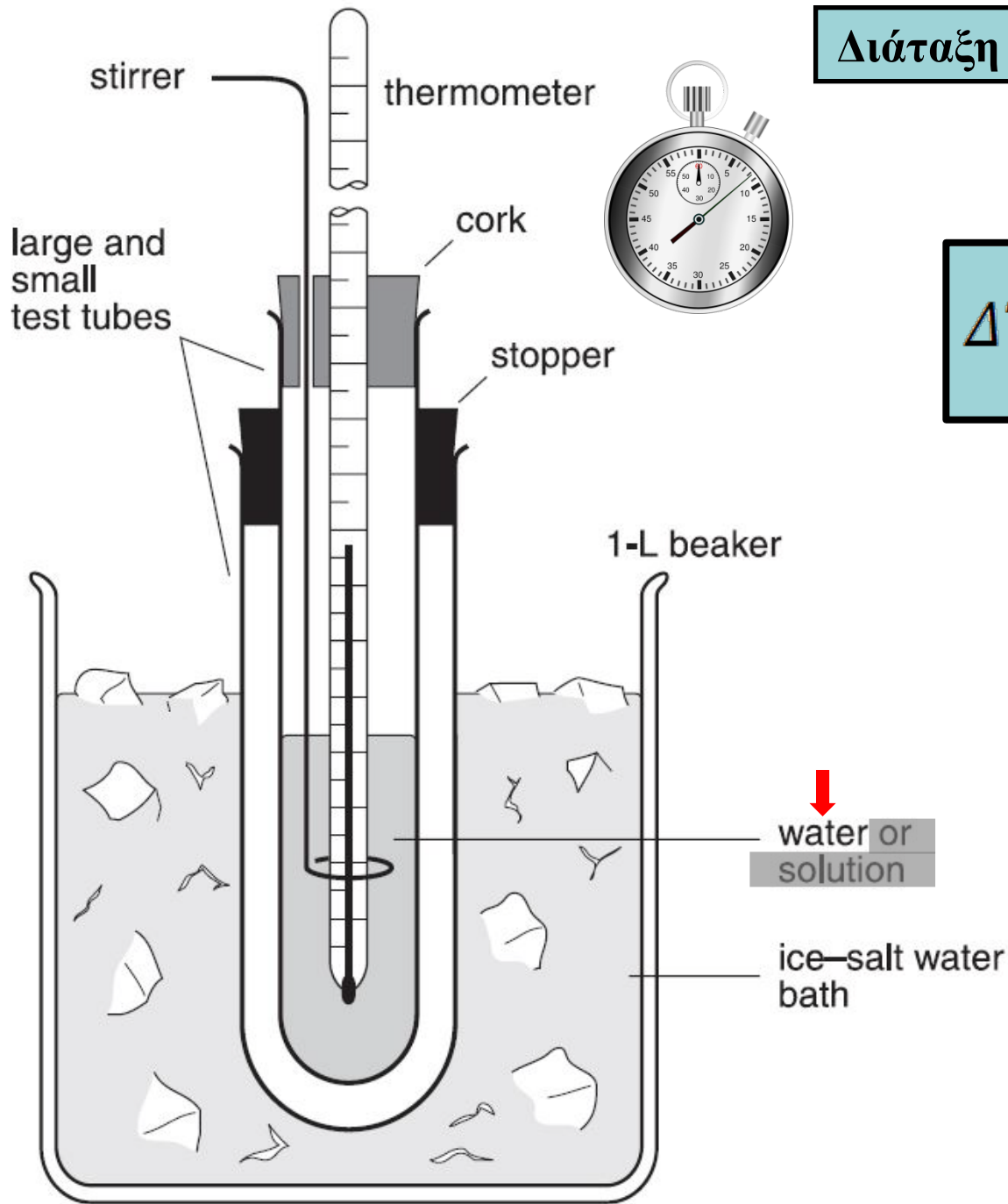
$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$



# Διάταξη για τον προσδιορισμό του Σ.Π.

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

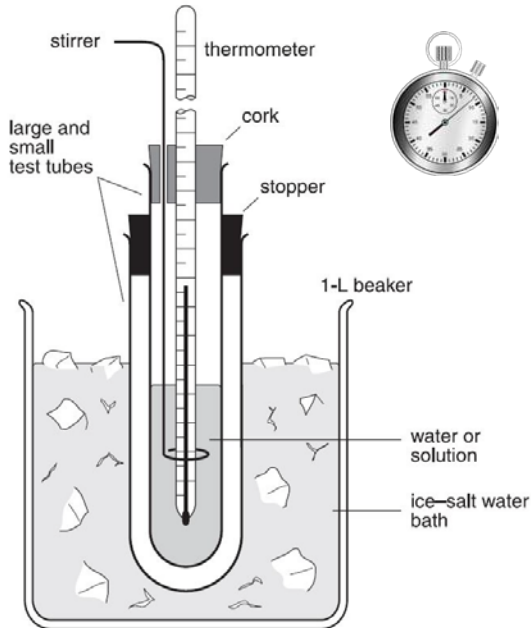
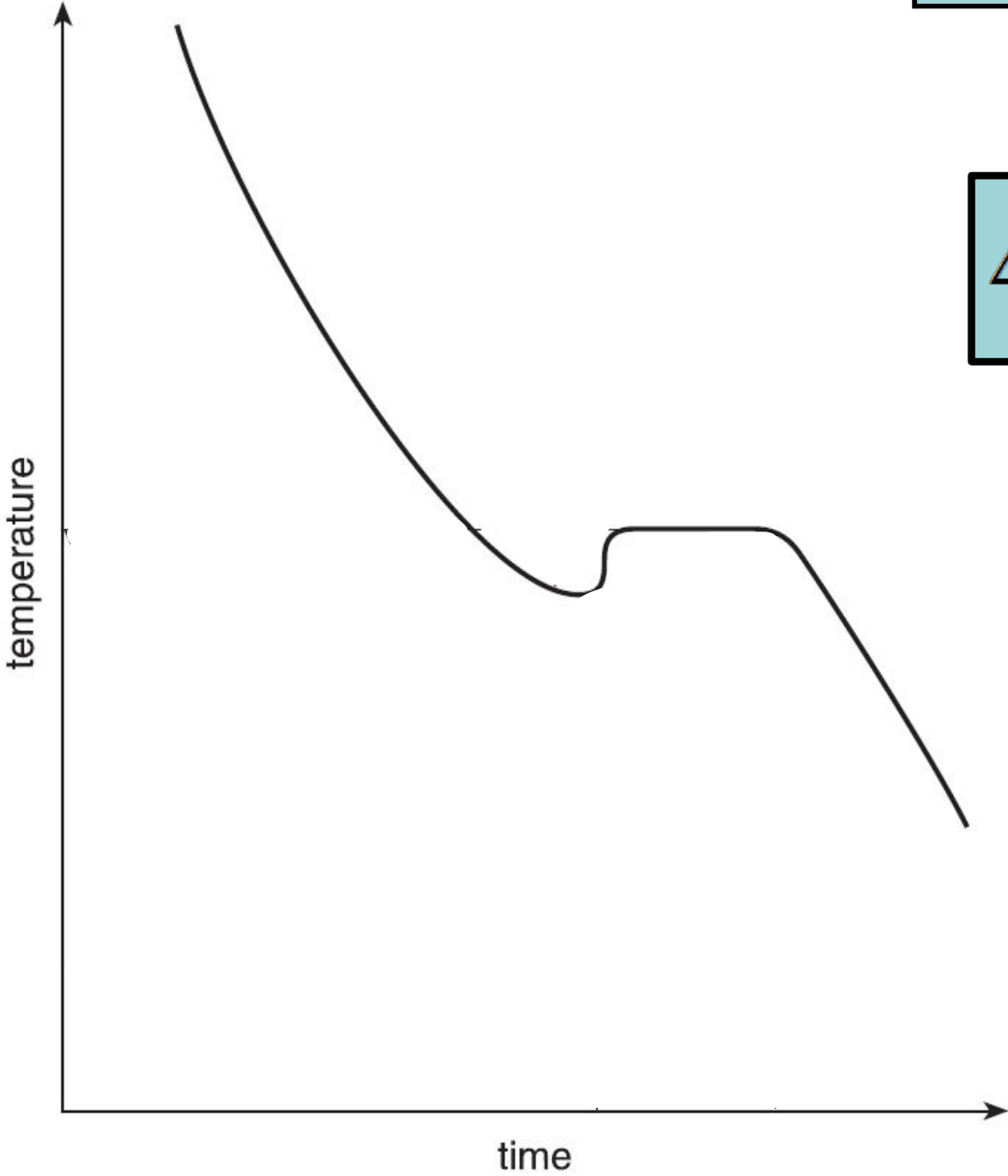
$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$



# Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

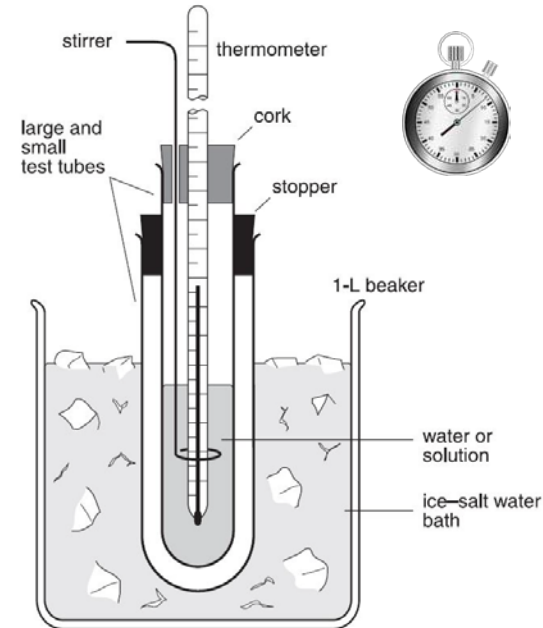
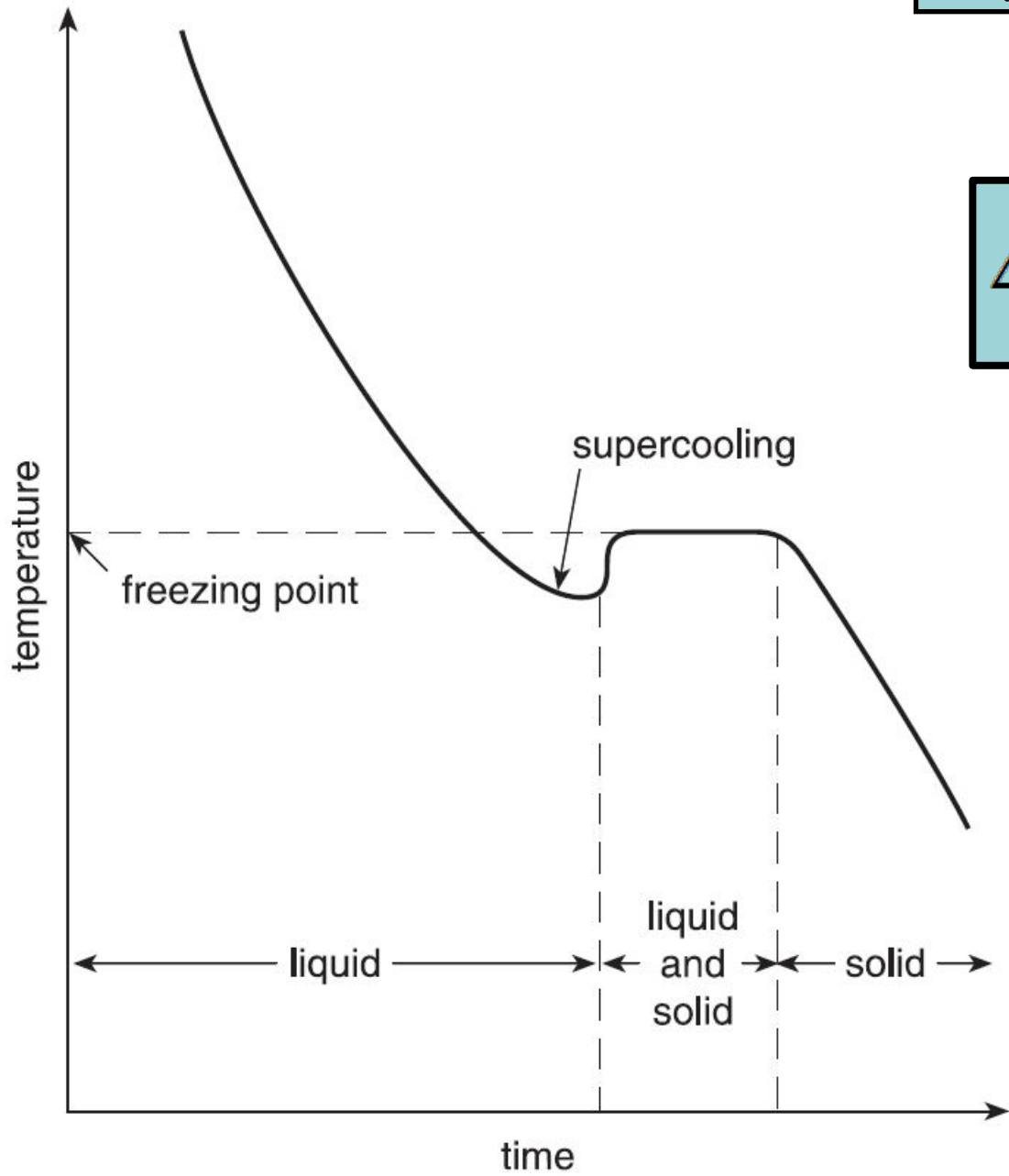




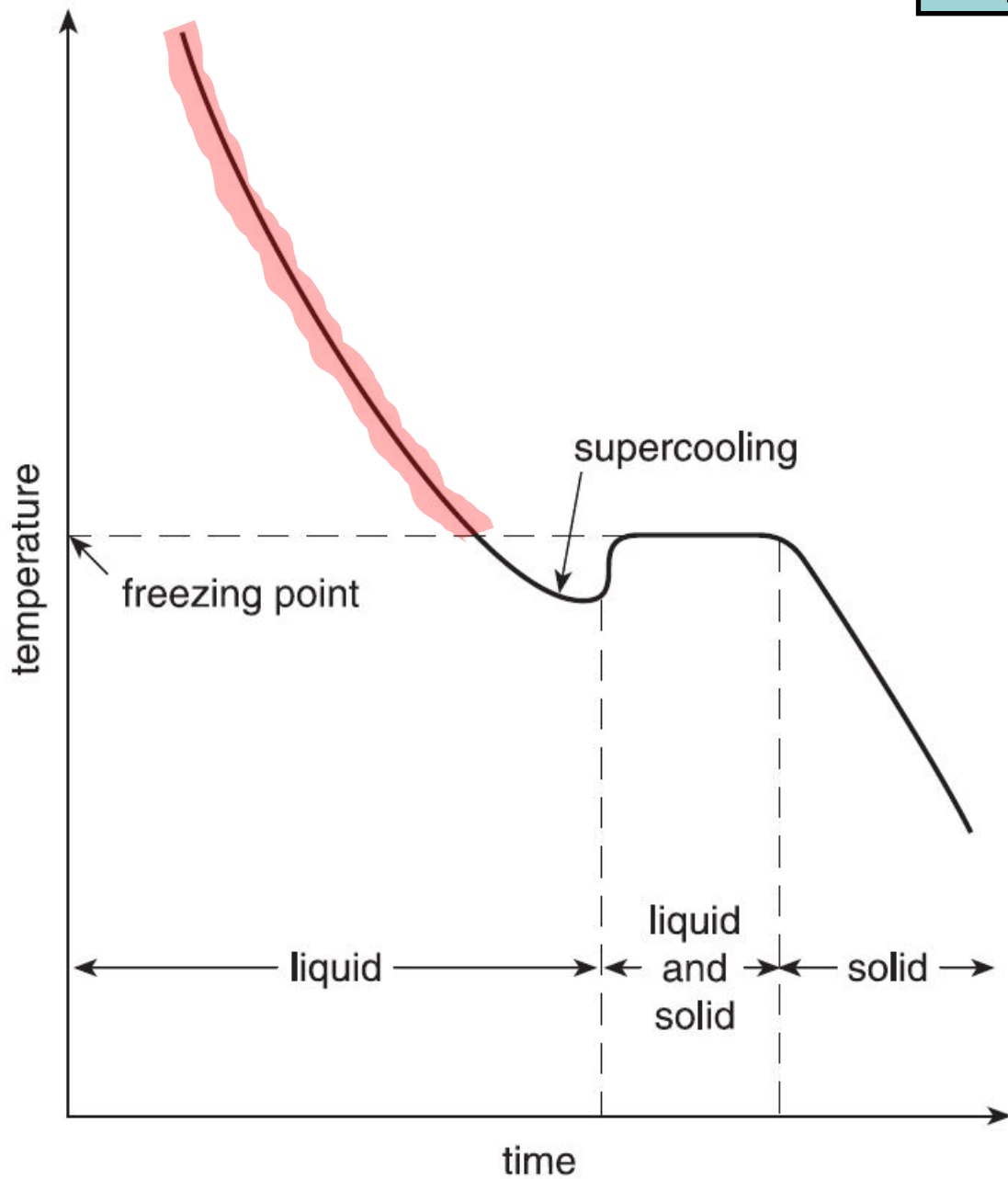
# Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

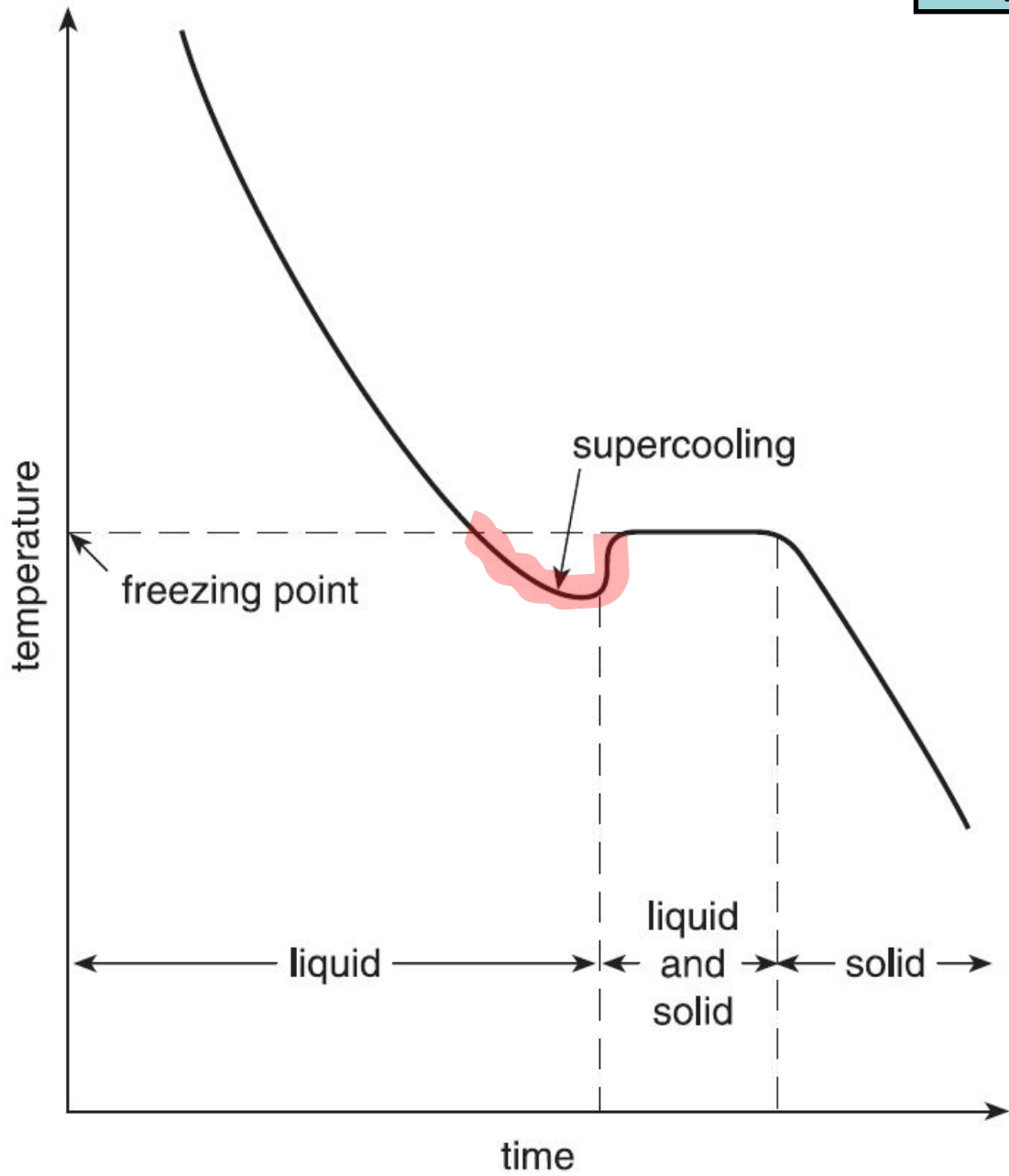
$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$



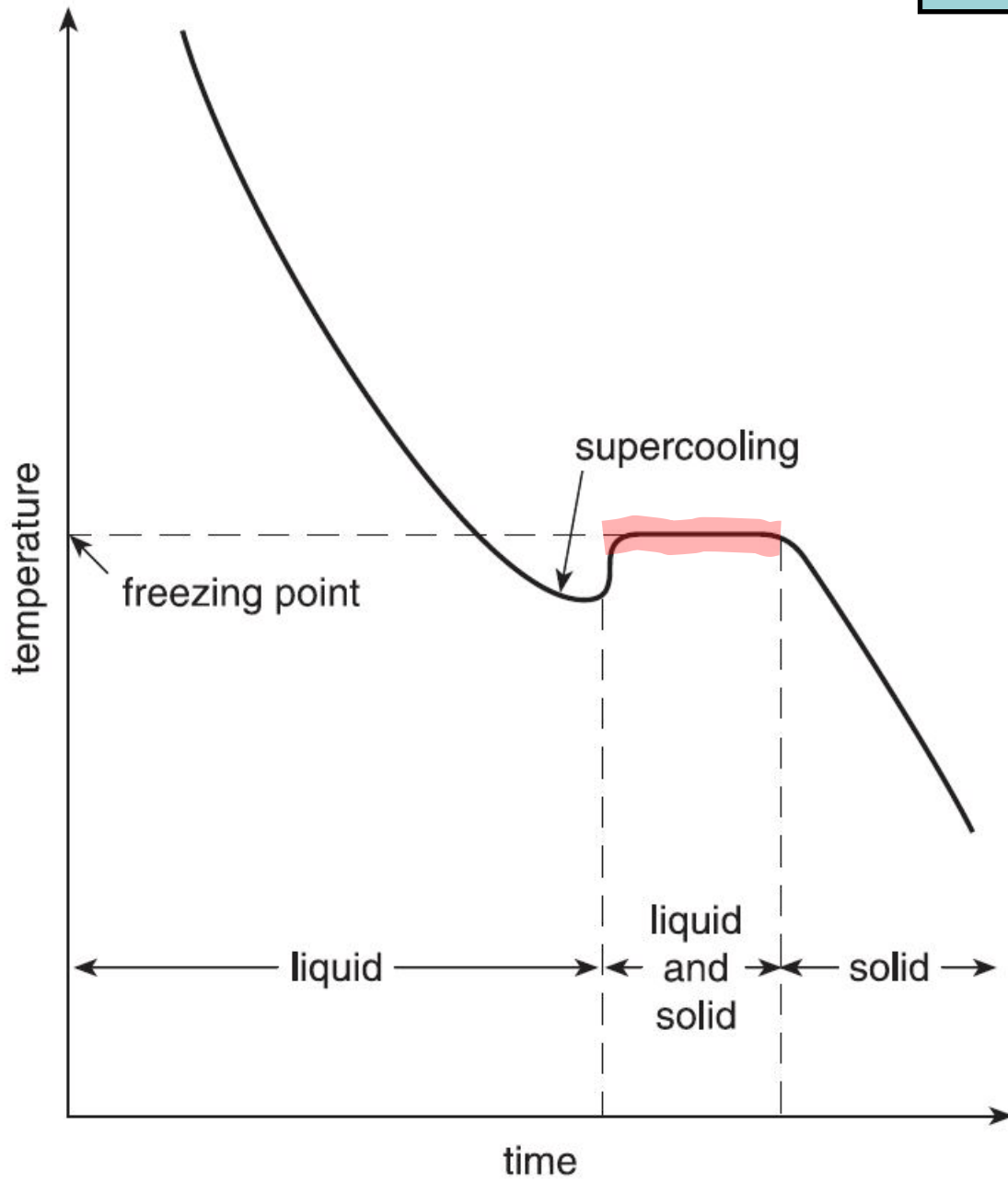
# Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη



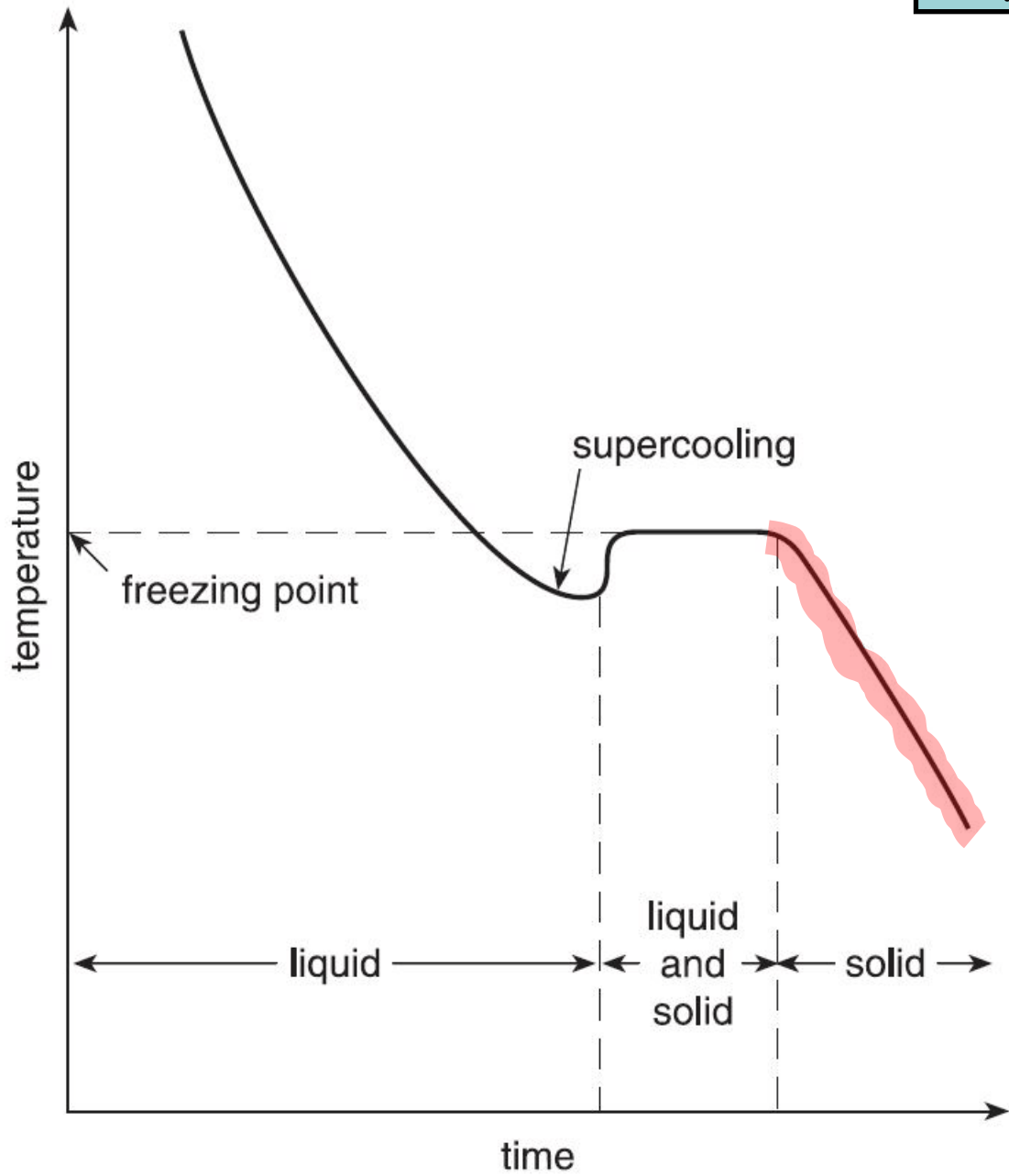
# Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη



# Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη



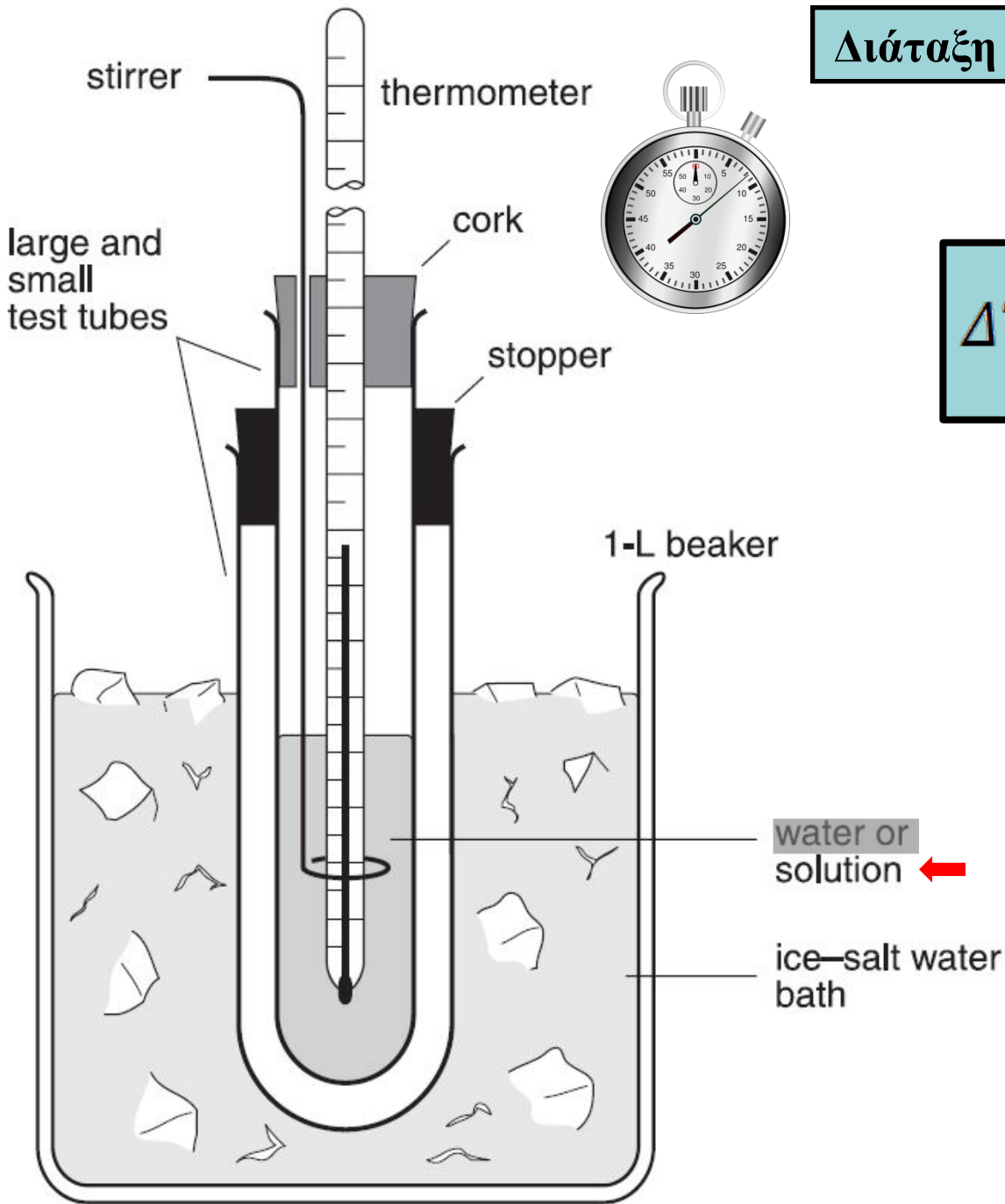
# Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη



Διάταξη για τον προσδιορισμό του Σ.Π.

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

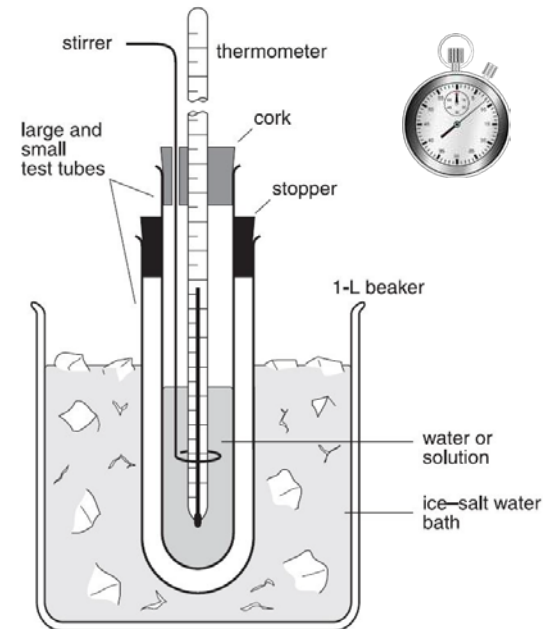
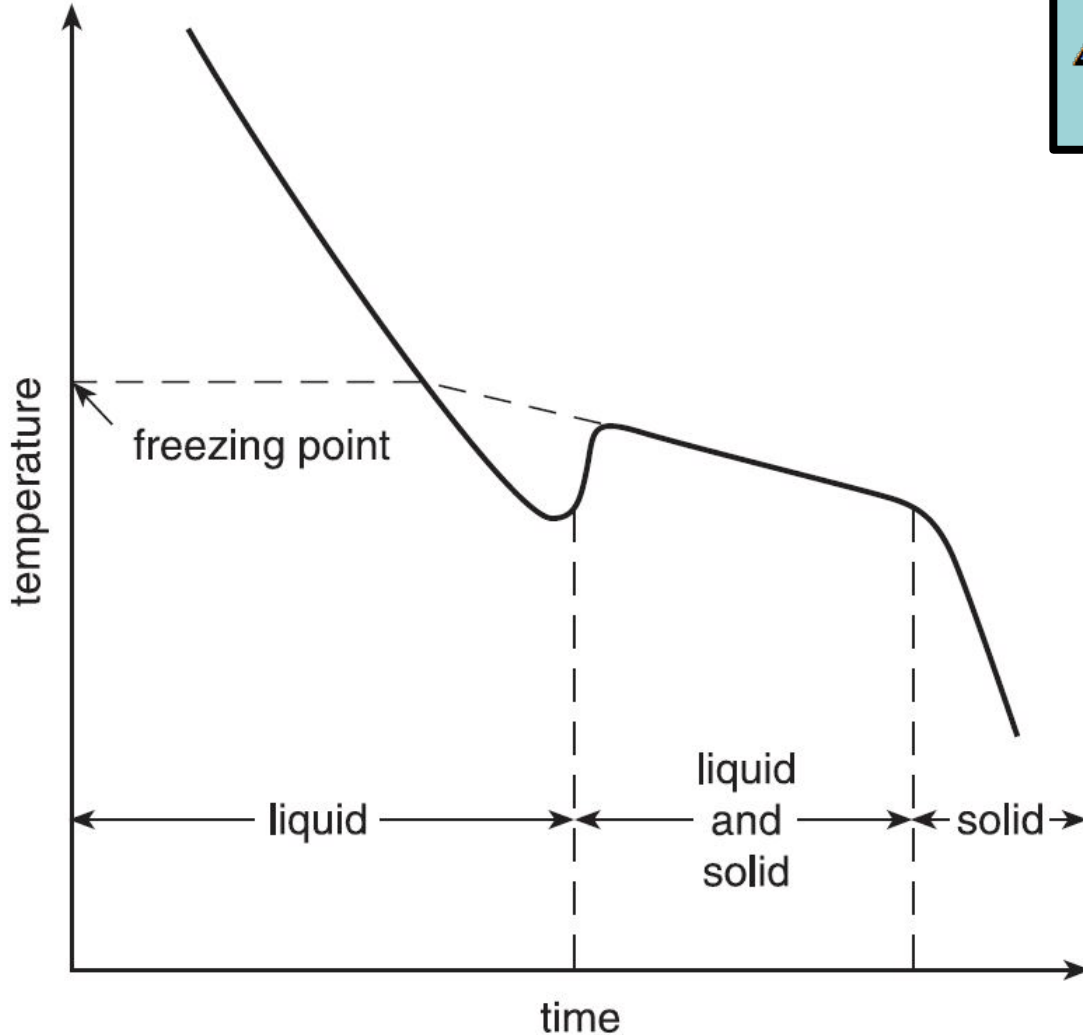
$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$



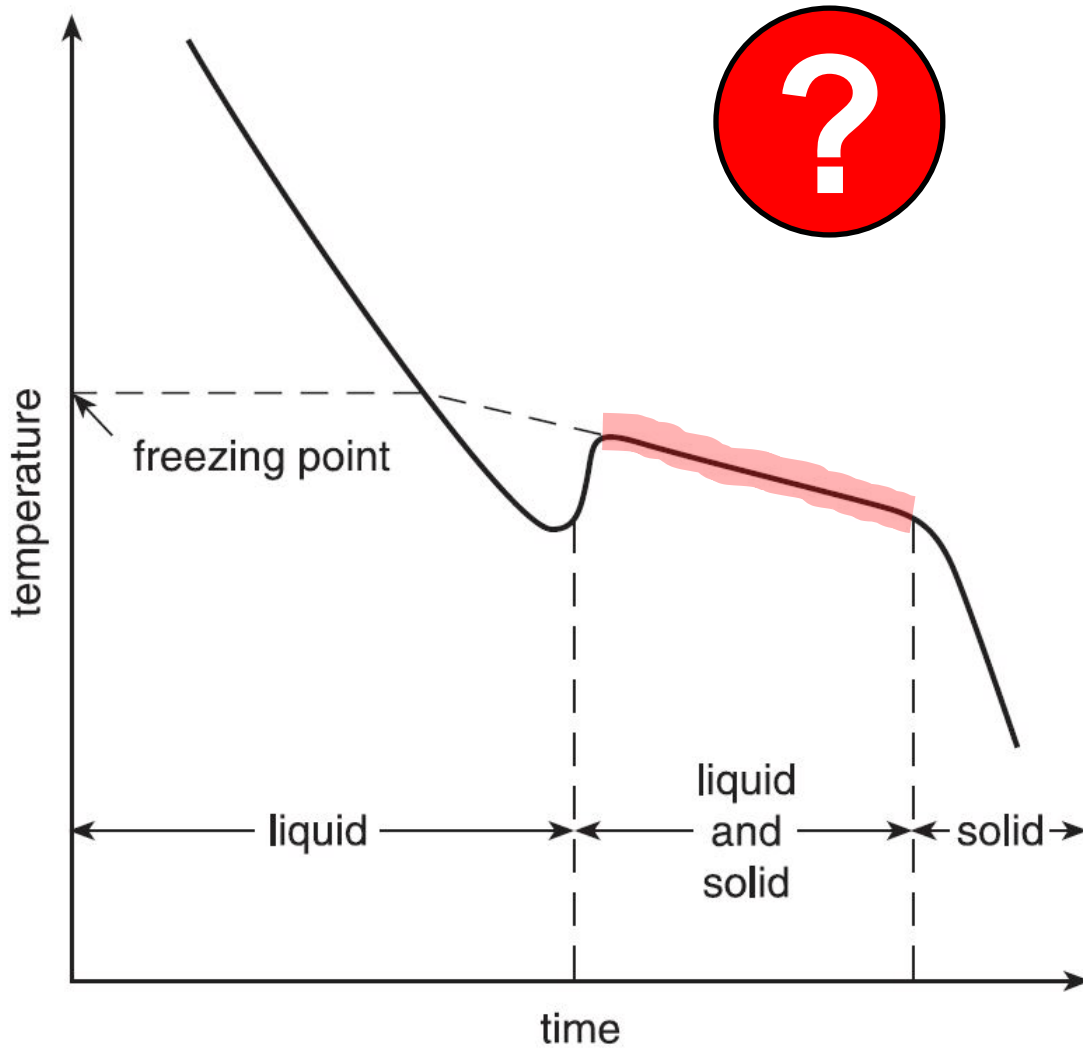
# Καμπύλη ψύξης διαλύματος

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

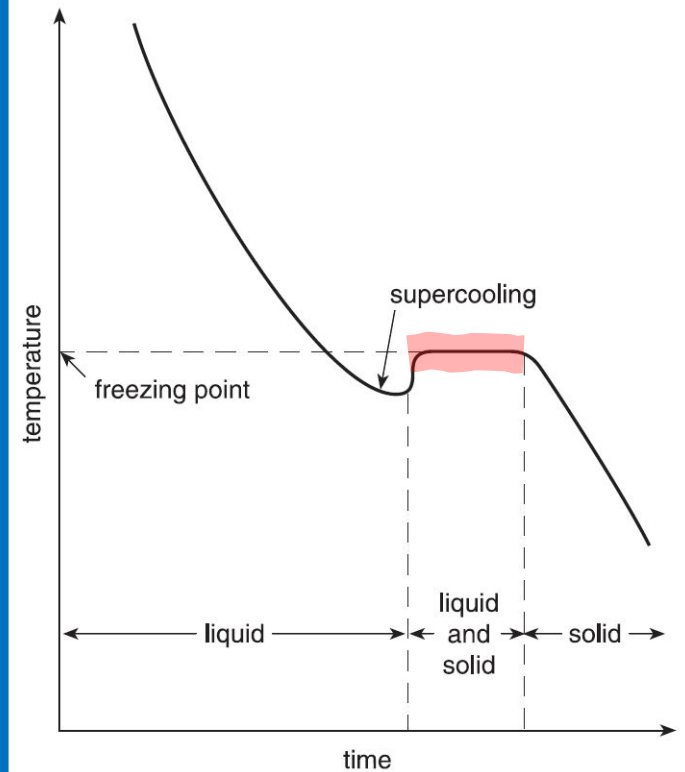
$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$



# Καμπύλη ψύξης διαλύματος



## Καμπύλη ψύξης καθαρού διαλύτη





# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυοσκοπίας

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

$$(m_B, \Delta T_f)$$

# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυοσκοπίας

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

1

$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

2

Η (σχ. 2) είναι της μορφής:

$$\Delta T_f = \kappa m_B$$

3

1. Προσδιορίζουμε τα  $\Delta T_f$  (σχ. 1) για διαλύματα που περιέχουν την ίδια μάζα διαλύτη ( $m_A$ ) αλλά διαφορετικές μάζες διαλυμένης ουσίας ( $m_B$ ).
2. Από την γραφική παράσταση των  $\Delta T_f$  έναντι των μαζών  $m_B$  προσδιορίζουμε την κλίση ( $\kappa$ ) της βέλτιστης ευθείας (σχ. 3).
3. Από τις (σχ. 2 και σχ. 3) έχουμε:

$$\kappa = K_f \frac{i}{m_A M_B} \Rightarrow$$

$$M_B = K_f \frac{i}{m_A \kappa}$$

# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυοσκοπίας

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

$$(m_B, \Delta T_f)$$

Διάλυμα	Μάζα διαλύτη	Μάζα ουσίας	Ταπείνωση Σ.Π.
1	$m_A$	$(m_B)_1$	$(\Delta T_f)_1$
2	$m_A$	$(m_B)_2$	$(\Delta T_f)_2$
3	$m_A$	$(m_B)_3$	$(\Delta T_f)_3$
4	$m_A$	$(m_B)_4$	$(\Delta T_f)_4$

# Προσδιορισμός της Γραμμομοριακής Μάζας ουσίας με την μέθοδο της Κρυοσκοπίας

$$\Delta T_f = T_f^* - T_f$$

1

$$\Delta T_f = K_f \frac{i}{m_A M_B} m_B$$

2

Η (σχ. 2) είναι της μορφής:

$$\Delta T_f = \kappa m_B$$

3

1. Προσδιορίζουμε τα  $\Delta T_f$  (σχ. 1) για διαλύματα που περιέχουν την ίδια μάζα διαλύτη ( $m_A$ ) αλλά διαφορετικές μάζες διαλυμένης ουσίας ( $m_B$ ).
2. Από την γραφική παράσταση των  $\Delta T_f$  έναντι των μαζών  $m_B$  προσδιορίζουμε την κλίση ( $\kappa$ ) της βέλτιστης ευθείας (σχ. 3).
3. Από τις (σχ. 2 και σχ. 3) έχουμε:

$$\kappa = K_f \frac{i}{m_A M_B} \Rightarrow$$

$$M_B = K_f \frac{i}{m_A \kappa}$$

